

Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Análisis Matemático
Continuidad y límites

1. Estudia la continuidad de la función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 1/4$ y:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x \in [0, 1[\cup]1, 2] \\ E(x) - 7/4 & \text{si } x \in]2, 4] \end{cases} \quad (E(x) \text{ es la parte entera de } x)$$

2. Sea $a > 1$. Prueba que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene al menos una solución positiva y otra negativa.
3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$. Justifica, haciendo uso de las propiedades de la exponencial, que f es continua en \mathbb{R} , estrictamente decreciente en \mathbb{R}^- y estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ . Calcula la imagen de f .
4. Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada para todo $x \neq 0$ por $f(x) = \arctg(\ln|x|)$. Sugerencia. Ten en cuenta que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\pi/2$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \pi/2$.
5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$ y $f(x) = \sin(x) \sin(1/x)$, para todo $x \neq 0$. Estudia la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y en $-\infty$.
6. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por

$$f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x}.$$

Estudia la continuidad de f y los límites en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f .

7. Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio, la imagen de la función $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. Sea $f : [-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \forall x \in [-1, 1[$$

Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio, todos los valores que toma f .

9. Sea $f :]-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in]-1, 1]$ por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad -1 < x < 1$$

Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio, todos los valores que toma f .